ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

4

TOMUL 31
1979
iulie — august

EXTRASE

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ASUPRA EGALITĂȚII $\mathscr{L}(E, F) = N(E, F)$(*)

DE

CONSTANTIN P. NICULESCU

Se dă o nouă abordare problemei lui A. Grothendieck privind egalitatea $\mathscr{L}(E, F) = N(E, F)$ care înglobează toate rezultatele precedente în această direcție.

Unul dintre rezultatele cele mai profunde din teoria geometrică (izometrică) a spațiilor Banach este acela al lui A. Dvoretzki [1] privind existența secțiunilor aproape sferice ale bulelor unitate ale spațiilor Banach. Distanța Banach-Mazur $d(E, F)$ dintre două spații Banach izomorfe se definește prin :

$$d(E, F) = \inf \{\|T\|\cdot\|T^{-1}\|\,;\ T \text{ izomorfism de la } E \text{ în } F\}.$$

Atunci are loc următorul rezultat :

1. TEOREMĂ (A. Dvoretzki). *Fie E un spațiu Banach infinit dimensional și fie $n \in \mathbb{N}$ și $\varepsilon > 0$. Atunci există un subspațiu n-dimensional $F \subset E$ astfel încît $d(F, \ell_2(n)) < 1 + \varepsilon$.*

Simplificări, precizări sau rafinări ale demonstrației originale se datoresc lui T. Figiel [3], T. Figiel, J. Lindenstraus și V. D. Milman [4], J. L. Krivine [9], V. D. Milman [15] și A. Szankowski [17].

Ele utilizează fie aparatul teoriei geometrice a măsurii (à la Federer) fie tehnici vis à vis de lema lui Ramsey de colorare.

Teorema lui Dvoretzki a permis soluționarea unor probleme considerate grele ale teoriei spațiilor Banach printre care și aceea a subspațiilor complementate. În cele ce urmează vom analiza (rafinînd o tehnică datorită lui J. Lindenstrauss și A. Pelczynski [10]) consecințele acestei teoreme într-o altă problemă centrală a teoriei spațiilor Banach :

2. PROBLEMĂ (A. Grothendieck). Fie E și F două spații astfel că orice operator de la E în F este nuclear. Este cel puțin unul dintre spațiile E și F finit dimensional?

Amintim că un operator $T \in \mathscr{L}(E, F)$ se zice nuclear dacă admite o reprezentare de forma $T = \Sigma \lambda_n z_n \otimes y'_n$ cu $y'_n \in E'$, $z_n \in F$, $\|z_n\| = \|y'_n\| = 1$ și $\Sigma |\lambda_n| < \infty$. Mulțimea tuturor asemenea operatori va fi notată cu $N(E, F)$.

Soluții ale problemei 2 sub diverse ipoteze suplimentare se datoresc lui W. B. Johnson, J. Lindenstrauss și M. Zippin, I. Tseitlin etc.

În prezenta soluționare a problemei 2 vom aborda o altă egalitate între spațiile de operatori. Anume, așa cum a arătat A. Grothendieck [6], orice operator de la un $\mathscr{L}_1$-spațiu într-un spațiu de tip $\mathscr{L}_2$ este absolut sumabil. Un $\mathscr{L}_p$-spațiu este precis un spațiu Banach E astfel

*) Lucrare prezentată la Simpozionul Național „Gheorghe Țițeica”, Craiova, 20–21 septembrie 1978.

STUDII ȘI CERC. MAT., TOM 31, NR. 4, P ..., 427–432, BUCUREȘTI, 1979

că E'' este complementat într-un spaţiu $L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. O observaţie importantă este aceea că dacă E este un $\mathscr{L}_p$-spaţiu infinit dimensional atunci există o constantă $\lambda > 1$ încît E conţine pentru fiece $n \in \mathbb{N}$ subspaţii E_n cu $d(E_n, \ell_n(n)) \leq \lambda$ şi proiecţii P_n de la E pe E_n cu $\|P_n\| \leq \lambda$. Vezi [11] pentru detalii.

Un operator $T \in \mathscr{L}(E, F)$ se zice absolut sumabil dacă există o constantă $k > 0$ încît :

$$\sum_{i=1}^{n} \| Tx_i \| \leq k \cdot \sup_{\substack{x' \in E' \\ \|x'\| \leq 1}} \sum_{i=1}^{n} | x'(x_i) |$$

pentru orice familie $x_1, \ldots x_n$ de elemente din E. Cea mai mică constantă k se notează cu $\pi_1(T)$ şi se numeşte norma absolut sumabilă a operatorului T. Mulţimea tuturor operatorilor $T \in \mathscr{L}(E, F)$ care sînt absolut sumabili se notează cu $\Pi_1(E, F)$.

Se pune în mod natural problema dacă rezultatul mai sus menţionat al lui A. Grothendieck admite şi o reciprocă :

3. Problemă. Dacă E şi F sînt două spaţii Banach infinit dimensionale astfel că :

$$\mathscr{L}(E, F) = \Pi_1(E, F)$$

este în mod necesar E izomorf cu un $\mathscr{L}_1$-spaţiu şi F izomorf cu un spaţiu Hilbert ?

Aşa cum a fost remarcat de S. V. Kisliakov [8] răspunsul la problema 3 este negativ. Mai precis el a arătat că există spaţii $Z \subset C[0, 1]$ încît $C\ [0, 1]/Z$ este reflexiv şi infinit dimensional şi pentru care $\mathscr{L}(Z', \ell_2) = \Pi_1(Z', \ell_2)$. În acest mod pentru a enunţa reciproce ale rezultatului lui A. Grothendieck sînt necesare condiţii suplimentare. Cea mai naturală este aceea a lui J. Lindenstrauss şi M. Zippin [12] şi anume ca spaţiul E să aibă suficiente algebre Boole de proiecţii. Practic o consecinţă a acestui caz este şi acela cînd E' este izomorf cu o latice Banach, dezvoltat de H. P. Lotz [13].

În abordarea problemei 2 a lui A. Grothendieck ne vom situa într-o clasă de spaţiu Banach legată de problema 3 :

4. Definiţie. Vom nota cu $\mathscr{G}$ clasa spaţiilor Banach E cu proprietatea că dacă orice compunere :

$$(*) \qquad c_0 \xrightarrow{T} E' \xrightarrow{S} \ell_2 \xrightarrow{j} c_0$$

este un operator absolut sumabil şi dacă E este infinit dimensional atunci E conţine un şir E_n de subspaţii finit dimensionale cu $\sup d(E_n, \ell_\infty(n)) = \lambda < \infty$ (şi deci, folosind proprietatea de injectivitate a spaţiilor $\ell_\infty(n)$, E' va conţine subspaţii F_n cu $d(F_n, \ell_1(n)) \leq \lambda$ şi pe care există proiecţii de normă $\leq \lambda$).

Am notat cu j incluziunea canonică a lui ℓ_2 în c_0.

5. *Observaţie*. Să remarcăm că potrivit teoremei graficului închis în condiţiile în care orice compunere (*) produce un operator absolut sumabil va exista o constantă $M > 0$ încît

$$\pi_1(j \circ s \circ T) \leqslant M \cdot \|S\| \cdot \|T\|$$

pentru orice operatori $S \in \mathscr{L}(E', l_2)$ şi $T \in \mathscr{L}(c_0, E')$. Rezultă prin urmare că pentru ca orice compunere (*) să producă un operator absolut sumabil este necesar ca E' să nu conţină pentru $p = 2$ sau $p = \infty$ vreun şir F_n de subspaţii finit dimensionale λ-complementate în E' şi astfel că $\sup d(F_n, \ell_p(n)) \leqslant \lambda$. La acest punct definiţia 4 este legată de ***problema fundamentală*** (încă deschisă) ***a teoriei locale a spaţiilor Banach*** : Este adevărat că orice spaţiu infinit dimensional E conţine pentru cel puţin un $p \in \{1, 2, \infty\}$ un şir E_n de subspaţii finit dimensionale λ-complementate şi astfel că $\sup d(E_n, \ell_p(n)) \leqslant \lambda$?

Aşa cum au remarcat W. B. Johnson şi L. Tzafriri în [7] problema fundamentală a teoriei locale a spaţiilor Banach primeşte un răspuns pozitiv pentru subspaţiile (închise) ale laticilor Banach L cu proprietatea că L nu conţine uniform spaţiile $\ell_\infty(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Combinînd acest fapt cu propoziţia 2.6 din [2] rezultă că *orice spaţiu Banach F al cărui dual este complementat într-o latice Banach* (echivalent, E are structură locală necondiţionată în sensul lui Y. Gordon şi D. R. Lewis) aparţine clasei $\mathscr{G}$.

În cele ce urmează ne va fi utilă şi următoarea :

6. *Observaţie.* Fie E un spaţiu Banach. Atunci orice operator $T \in \mathscr{L}(E', \ell_2)$ este limita punctuală a unui şir generalizat S'_α cu $S_\alpha \in \mathscr{L}(\ell_2, E)$ şi $\|S_\alpha\| \leqslant \|T\|$. În plus :

$$\pi_1(T) = \lim_\alpha \pi_1(S'_\alpha).$$

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $\{e_n\}_n$ desemnează baza canonică a spaţiului ℓ_2 putem defini operatorii S_α prin :

$$S_\alpha(\cdot) = \sum_{n \in \alpha} \langle e_n, \cdot \rangle \, T'(e_n)$$

pentru orice parte finită $\alpha \subset \mathbb{N}$, q.e.d.

Proprietatea duală aceluia din definiţia 4 este indicată în următoarea :

7. LEMĂ *Fie E un spaţiu Banach infinit dimensional de clasă $\mathscr{G}$. Dacă :*

$$(T \circ S \circ j')' \in \pi^1(\ell_\infty, \ell_\infty)$$

pentru orice $T \in \mathscr{L}(E, \ell_1)$ şi orice $S \in \mathscr{L}(\ell_2, E)$ atunci E' conţine un şir de subspaţii finit dimensionale F_n cu $\sup d(F_n, \ell_1(n)) = \lambda < \infty$ *şi pe care există proiecţii de normă $\leqslant \lambda$.*

Demonstraţie. Vom remarca mai întîi că :

$$j \circ R' \circ U \in \pi_1(c_0, c_0)$$

pentru orice $U \in \mathscr{L}(c_0, E')$ şi orice $R \in \mathscr{L}(\ell_2, E)$. Într-adevăr, $(j \circ R' \circ U)' = (U' \circ i_E) \circ R \circ j'$ şi deci $(j \circ R' \circ U)'' \in \pi_1(\ell_\infty, \ell_\infty)$.

Am desemnat prin i_E incluziunea canonică a lui E în E''. Conform teoremei graficului închis există o constantă $M > 0$ astfel că

$$\pi_1(j \circ R' \circ U) \leqslant M \cdot \|R\| \cdot \|U\|$$

pentru orice $U \in \mathscr{L}(c_0, E')$ şi orice $R \in \mathscr{L}(\ell_2, E)$. Conform Observaţiei 6, de aici rezultă că :

$$\pi_1(j \circ S \circ T) \leqslant M \cdot \|S\| \cdot \|T\|$$

pentru orice $T \in \mathscr{L}(c_0, E')$ şi orice $S \in \mathscr{L}(E', \ell_2)$ astfel că rămîne să facem uz de definiţia 4, q.e.d.

8. LEMĂ *Fie E şi F două spaţii Banach infinit dimensionale astfel că E este de clasă $\mathscr{G}$.*

i) *Dacă $\mathscr{L}(E, F) = \Pi_1(E, F)$ atunci F este izomorf cu un spaţiu Hilbert iar E conţine un şir de subspaţii E_n cu* $\sup d(E_n, \ell_1(n)) = \lambda < \infty$ *şi pe care există proiecţii de normă $\leqslant \lambda$;*

ii) *Dacă $T \in \mathscr{L}(F, E)$ implică $T' \in \Pi_1(E', F')$ atunci F este izomorf cu un spaţiu Hilbert iar E conţine un şir de subspaţii E_n cu* $\sup d(E_n, \ell_\infty(n)) < \infty$.

Demonstraţie. În cele ce urmează vom prezenta detaliile de demonstraţie numai pentru ii). În primul rînd să notăm existenţa unei constante $M > 0$ astfel că $\pi_1(T') \leqslant M \cdot \|T\|$ pentru orice $T \in \mathscr{L}(F, E)$. Conform teoremei lui Dvoretzky pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $n \in \mathbb{N}$ există un subspaţiu închis $G \subset F$ de codimensiune n precum şi un izomorfism $S : \ell_2(n) \to F/G$ astfel că $\|S\| \cdot \|S^{-1}\| \leqslant 1 + \varepsilon$. Dacă $R \in L(\ell_2(n), E)$ şi $\varphi : F \to F/G$ este aplicaţia cît canonică, atunci

$$\pi_1((R \circ S^{-1})') = \pi_1((R \circ S^{-1} \circ \varphi)' \leqslant M \cdot \|R \circ S^{-1} \circ \varphi\| \leqslant M \cdot \|R\| \cdot \|S^{-1}\|$$

şi deci :

$$\pi_1(R') = \pi_1((R \circ S^{-1} \circ S)') \leqslant \pi_1((R \circ S^{-1})') \cdot \|S\| \leqslant M(1 + \varepsilon) \cdot \|R\|.$$

Pentru $T \in \mathscr{L}(\ell_2, E)$ să punem $R_n = T|\ell_2(n)$ şi fie P_n proiecţia canonică a lui ℓ_2 pe $\ell_2(n)$. Atunci $T = \lim_{n \to \infty} R_n \circ P_n(x)$ pentru orice $x \in \ell_2$ şi conform observaţiei 6 rezultă că :

$$\pi_1(T') = \lim_{n \to \infty} \pi_1((R_n \circ P_n)') \leqslant M(1 + \varepsilon) \cdot \|T\|$$

ceea ce conform lemei 7 atrage după sine că E conţine uniform spaţiile $\ell_\infty(n)$ şi deci E' conţine un şir de subspaţii finit dimensionale F_n cu $d(F_n, \ell_1(n)) \leqslant \lambda$ pe care există proiecţii de normă $\leqslant \lambda$.

Prin urmare va exista o constantă $C > 0$ încît $\pi_1(T) \leqslant C \cdot \|T\|$ pentru orice $T \in \mathscr{L}(\ell_1(n), F')$ şi orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie $\varphi : \ell_1(\Gamma) \to F'$ o aplicaţie surjectivă construită pentru Γ o mulţime convenabilă de indici. Atunci φ va fi absolut sumabilă şi deci va factoriza printr-un spațiu Hilbert. În concluzie spațiul E este izomorf cu un spațiu Hilbert, q.e.d.

Putem enunța acum rezultatul principal al acestei lucrări :

9. TEOREMĂ. *Fie E și F două spații Banach dintre care cel puțin unul este de clasă $\mathcal{G}$.*

Dacă orice operator T de la E în F este absolut sumabil și are transpus absolut sumabil atunci E sau F este finit dimensional.

Demonstrație. Să presupunem că ambele spații E și F sînt infinit dimensionale.

Dacă F este de clasă $\mathcal{G}$ atunci din lema 8(i) rezultă că F este izomorf cu un spațiu Hilbert iar E conține un șir de subspații finit dimensionale E_n cu $d(E_n, \ell_1(n)) \leqslant \lambda$ și pe care există proiecții de normă $\leqslant \lambda$.

Prin urmare incluziunile canonice $\ell_1(n) \to \ell_2(n)$ se pot prelungi natural la operatori $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$ astfel că $\sup \|T_n\| < \infty$ și $\sup \pi_1(T'_n) = \infty$ (deoarece transpusa incluziunii canonice $\ell_1 \to \ell_2$ nu este un operator absolut sumabil). Aceasta însă contrazice faptul că transpusul oricărui operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ trebuie să fie absolut sumabil.

Dacă F aparține clasei $\mathcal{G}$ atunci conform lemei 8(ii) E este izomorf cu un spațiu Hilbert iar F conține un șir F_n de subspații finit dimensionale cu $\sup d(F_n, \ell_\infty(n)) < \infty$. Se arată ușor că aceasta este în contradicție cu faptul că egalitatea $\mathcal{L}(E, F) = \Pi_1(E, F)$ implică existența unei constante M pentru care $\pi_1(T) \leqslant M \cdot \|T\|$ oricare ar fi $T \in \mathcal{L}(\ell_2(n), F)$ și oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, q.e.d.

Din teorema 9 rezultă că problema 2 a lui A. Grothendieck primește un răspuns pozitiv cel puțin cînd unul dintre spațiile E și F are structură locală necondiționată în sensul lui Y. Gordon și D. R. Lewis, sau verifică problema fundamentală a teoriei locale a spațiilor Banach.

Primită la redacție în 16 ianuarie 1979

Facultatea de științe ale naturii
Universitatea din Craiova

BIBLIOGRAFIE

1. DVORETZKY A., *Some results on convex bodies and Banach spaces.* Proc. Int. Symp. on linear spaces, Jerusalem, 1961, 123–160.
2. FIGIEL T., W. B. JOHNSON and TZAFRIRI L., *On Banach lattices and spaces having local unconditional structure with applications to Lorentz function spaces.* J. Approximation Theory, **13** (1975), 395–412.
3. FIGIEL T., *A short proof of Dvoretzhky's theorem on almost spherical sections,* Compositio Math., **33** (1976), 297–301.
4. FIGIEL T., LINDENSTRAUSS J. and MILMAN V. D., *The dimension of almost spherical sections of convex bodies.* Acta. Math., **139** (1977), 52–94.
5. GORDON Y. and LEWIS D. R., *Absolutely summing operators and local unconditional structures.* Acta Math., **133** (1974), 27–48.
6. GROTHENDIECK A., *Résumé de la theorie metrique des produits tensoriels topologiques.* Boletim Soc. Mat. Sao-Paolo, **8** (1956), 81–110.

7. Johnson W. B. and Tzafriri L., *On the local structure of subspaces of Banach lattices.* Israel J. Math., **20** (1975), 292—299.
8. Kisliakov S. V., *Spaces with "small" annihilators,* Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov, **65** (1976), 192-195 (Russian).
9. Krivine J. L., *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés.* Annals of Math., **104** (1976), 1—29.
10. Lindenstrauss J. and Pelczyasky A., *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications.* Studia Math. **28** (1968), 275—326.
11. Lindenstrauss J. and Rosenthal H. P., *The $\mathcal{L}_p$-spaces,* Israel J. Math., **7** (1969), 325—349.
12. Lindenstrauss J. and Zippin M., *Banach spaces with sufficiently many Boolean algebras of projections.* Journal Math., Anal. and Appl., **25** (1969), 309—320.
13. Lotz H. P., *Minimal and Reflexive Banach lattices,* Math. Ann., **209** (1974), 117—126.
14. Lotz H. P., *AL-spaces, AM-spaces and Grothendieck's fundamental theorem.* Preprint, Urbana Ill, 1974.
15. Milman V. D., *A new proof of the theorem of A. Dvoretzky on sections of convex bodies.* Funct. Anal. Appl., **5** (1971), 28—37.
16. Retherford J. R. and Stegall C., *Fully nuclear and completely nulear operators with aplications to $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_\infty$-spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., **163** (1972), 457—492.
17. Szankowski A., *On Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies.* Israel J. Math., **17** (1974), 325—338.
18. Tseitlin I. I., *On a particular case of the existence of a compact operator which is not nuclear.* Funk. Analiz i Pril., **6** (1973), 102.

ON EQUALITY $\mathcal{L}(E, F)=N(E, F)$

(ABSTRACT)

A Banach space E is said to be a $\mathcal{G}$-space provided that if every composition (j denotes, the canonical inclusion)

$$c_0 \xrightarrow{T} E' \xrightarrow{S} l_2 \xrightarrow{j} c_0$$

is absolutely summing then E is either finite dimensional or E contains uniformly the spaces $l_\infty(n)$, $n \in \mathbb{N}$. By combining the main result in [7] with the proof of Theorem 2.6 in [2] it follows that every Banach space with local unconditional structure in the sense of Gordon and Lewis is a $\mathcal{G}$-space. Also, if E contains for $p = 1$ (or $p = 2$) λ-complemented subspaces E_n with $d(E_n, l_p(n) \leq \lambda$, $n \in \mathbb{N}$, then E is a $\mathcal{G}$-space.

MAIN RESULT. Let E or F be a $\mathcal{G}$-space. If every operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ is absolutely summing and has absolutely summing adjoint then E or F is finite dimensional.